Appendix – MoMe

Een mooi voorbeeld van mooie meetkunde – Dick Klingens
oktober 2016

1. Vermenigvuldiging

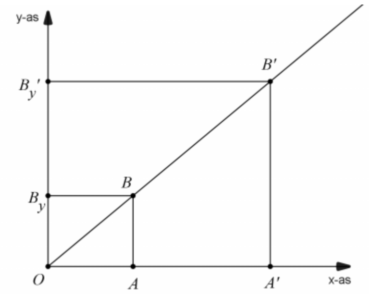
Een belangrijke transformatie (meetkundige afbeelding) is de vermenigvuldiging.
Het is een afbeelding die punten van het vlak (of de ruimte) op elkaar afbeeldt (aan elkaar toevoegt) conform de volgende definitie.

Definitie. Bij een vast punt O (**centrum**) en een reëel getal k ($\neq 0$; **factor**) ligt bij de **vermenigvuldiging** V het beeld $P' = V(P)$ van het punt P zó op de lijn OP dat [a1]:
$|OP'| = k \cdot |OP|$
waarbij indien $k > 0$ is, de punten P en P' aan *dezelfde* kant van O liggen, en indien $k < 0$ is, aan *verschillende* kanten. ◊

2. Toepassing op een lijnstuk

Om de in de vorige paragraaf staande definitie toe te passen op een lijnstuk AB kiezen we een orthogonaal assenstelsel xOy; zie figuur 1.
Uit de definitie van de vermenigvuldiging volgt dat, als daarbij O als centrum wordt gekozen, de assen – niet-puntsgewijs – invariant zijn.

figuur 1



Bij de hierboven bedoelde keuze leggen we de x-as zó door het punt A, dat tevens AB loodrecht staat op de x-as.
Met $A = (a, 0)$ en $k > 0$ ligt dan A' op de x-as met $V(A) = A' = (ka, 0)$.
Met $B = (a, b)$ en $B_y = (0, b)$ is $V(B_y) = B_y' = (0, kb)$, zodat dan voor het punt $B' = (ka, kb)$ geldt:

$$OB' = \sqrt{(ka)^2 + (kb^2)} = k \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = k \cdot OB$$

Merk verder op dat hoeken onder V invariant zijn, en daarmee is dat ook het geval met evenwijdigheid van lijn(stukk)en.

3. Asymptoten van een hyperbool

De middelpuntsvergelijking van een hyperbool, met 2a en 2b als lengtes van de assen, is:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Voor het vinden van de vergelijkingen van de asymptoten vermenigvuldigen we met a^2b^2 en delen vervolgens door x^2. Dit geeft (omdat we $x \neq 0$ onderstellen):

$$b^2 - a^2\frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2b^2}{x^2} \Rightarrow b^2 - a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{x^2}$$

Als in het rechter lid van deze vergelijking x 'erg groot' is, dan is de waarde van dat rechter lid 'ongeveer' gelijk aan 0.
Willen we dit ook in het linker lid bereiken, dan moet, voor 'grote' x, gelden:

$$\tfrac{y}{x} = \pm\tfrac{b}{a} \Rightarrow y = \pm\tfrac{b}{a}x$$

De vergelijkingen van de asymptoten van de hyperbool (in middelpuntsvergelijking) zijn dus:

$$y = \tfrac{b}{a}x \text{ en } y = -\tfrac{b}{a}x$$

4. Orthogonale hyperbool

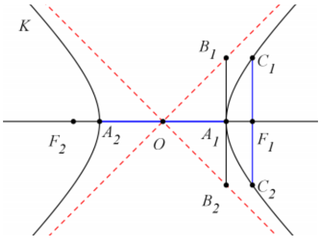
De asymptoten van de hyperbool met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hebben de vergelijkingen (zie paragraaf 3): $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$.

Bij een orthogonale (ook wel *gelijkzijdige*) hyperbool [a2] staan de asymptoten loodrecht op elkaar, zodat voor de richtingscoëfficiënten geldt:

$\frac{b}{a} \cdot \frac{-b}{a} = -1$ of $a^2 = b^2$

De middelpuntsvergelijking van een orthogonale hyperbool (beide halve assen hebben de lengte a) is dan: $x^2 - y^2 = a^2$.

figuur 2

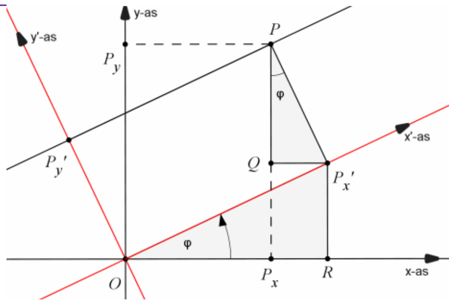


Opmerking. Voor de verklaring van de term ‘gelijkzijdig’ moeten we terug naar Apollonius van Perga (262 – 190 v. Chr.). In diens boek “Konika” (= kegelsneden) heet de koorde door een brandpunt loodrecht op de hoofdas (vertaald in het Latijn) *latus rectum*, rechtop staande zijde. Het is het lijnstuk C_1C_2 in figuur 2. De hoofdas zelf, het lijnstuk A_1A_2, heet (vertaald) ‘latus transversum’. En deze lijnstukken, zijden, zijn bij een orthogonale hyperbool inderdaad aan elkaar gelijk. [a3] ◊

5. Rotatie van de assen

De rotatie van de coördinaatsassen wordt gebruikt om vergelijkingen van meetkundige figuren te vereenvoudigen.

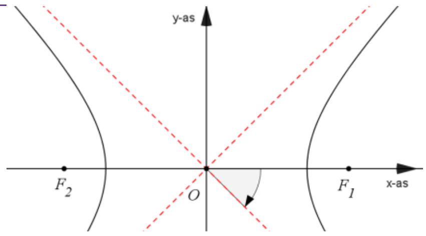
figuur 3



In figuur 3 is $P = (x, y)$ in het assenstelsel xOy.
Dit stelsel is geroteerd over de hoek φ in positieve richting; het nieuwe assenstelsel is $x'Oy'$.
We willen nu het verband bepalen tussen de coördinaten van P in het oude stelsel en die van $P = (x', y')$ in het nieuwe assenstelsel.
Met gebruik van de naamgeving van de punten in figuur 3 is:
(5.1)… $OP_x = x$, $P_xP = y$, $OP_x' = x'$, $P_x'P = y'$
en verder:
(5.2)… $OP_x = OR - P_xR = OR - P_x'Q$
(5.3)… $P_xP = QP_x + PQ = P_x'R + PQ$
Zodat met goniometrische verhoudingen in de driehoeken ORP_x' en PQP_x' uit (5.1-5.3) volgt:
$x = OP_x' \cdot \cos\varphi - PP_x' \cdot \sin\varphi = x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi$
$y = OP_x' \cdot \sin\varphi + PP_x' \cdot \cos\varphi = x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi$

We passen deze formules toe op de orthogonale hyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = a^2$; zie figuur 4.
Daarbij kiezen we de assen van het nieuwe stelsel langs de asymptoten, en wel zo, dat de hyperbool dan gelegen is in het *eerste en derde* kwadrant.

figuur 4



Hiertoe is het dus nodig te roteren over een hoek van -45°. En dan is:

$$\begin{cases} x = x'\cos(\text{-}45^o) - y'\sin(\text{-}45^o) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(x' + y') \\ y = x'\sin(\text{-}45^o) + y'\cos(\text{-}45^o) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\text{-}x' + y') \end{cases}$$

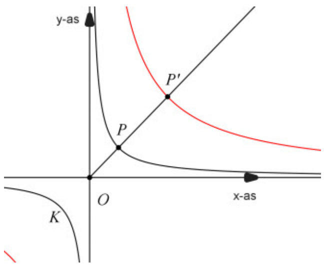
Invullen in de vergelijking van de hyperbool geeft:

$$\tfrac{1}{2}(x'+y')^2 - \tfrac{1}{2}(\text{-}x'+y')^2 = a^2 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}\cdot 4x'y' = a^2 \;\Rightarrow\; x'y' = \tfrac{1}{2}a^2$$

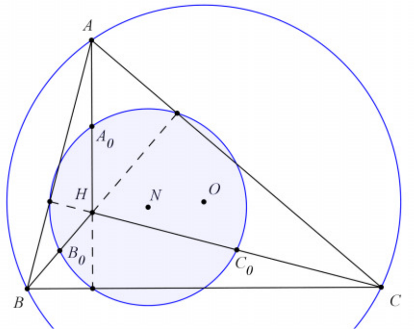
6. Gelijkvormige orthogonale hyperbolen

Op de orthogonale hyperbool $\mathcal{K}$ in het xOy-assenstelsel met vergelijking $xy = p$ passen we de vermenigvuldiging V_O (centrum O, factor $k > 0$) toe; zie paragraaf 1 en figuur 5a.
Voor een willekeurige punt $P = (x, y)$ van $\mathcal{K}$ hebben we dan:
$V_O(P) = P' = (x', y')$
waarbij:
$x' = k \cdot x$ en $y' = k \cdot y$
Daaruit volgt: $x = x'/k$ en $y = y'/k$.
Zodat:
$xy = p = x'/k \cdot y'/k = (x'y')/k^2$, en dan is $x'y' = p/k^2$
De coördinaten van P' voldoen daarmee aan de vergelijking $xy = p/k^2$; en dit is de vergelijking van een orthogonale hyperbool.
Het beeld van een orthogonale hyperbool bij de vermenigvuldiging V_O is weer een orthogonale hyperbool.
Op grond hiervan noemen we deze hyperbolen ook wel *gelijkvormig*.

figuur 5a



figuur 5b



7.1. De n-cirkel (later te noemen: negenpuntscirkel)

We gaan uit van een driehoek ABC met hoogtepunt H, waarvan O het middelpunt van de omcirkel is. We bekijken daarbij de 'bovenste stukken' van de hoogtelijnen van de driehoek; dit zijn de lijnstukken AH, BH en CH (zie figuur 5b).
De middens van deze lijnstukken noemen we opvolgend A_0, B_0 en C_0. Uiteraard liggen deze punten op een cirkel.

Definitie (voorlopig). De cirkel die gaat door de middens van de 'bovenste stukken' van de hoogtelijnen van een driehoek, is de **n-cirkel** van die driehoek. ◊

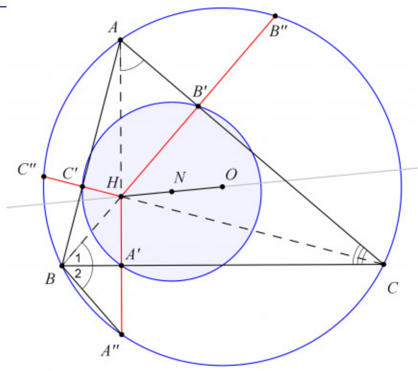
De ligging van het middelpunt N van de n-cirkel is echter bijzonder: N is het midden van het lijnstuk HO.
We kunnen dit eenvoudig aantonen.
We bekijken de vermenigvuldiging V_H met centrum H en met factor ½. Daarbij is:

$V_H(A) = A_0$, $V_H(B) = B_0$, $V_H(C) = C_0$
Het punt O gaat daardoor over in N, waarbij $HN = ½ \cdot HO$.
De straal van de omcirkel van driehoek $A_0B_0C_0$ is dus gelijk aan de *helft* van de straal van de omcirkel van driehoek ABC.
We hebben daarmee bewezen:

Stelling a1. Van een driehoek is het middelpunt van de n-cirkel het midden N van het lijnstuk HO en daarbij is straal van de n-cirkel is gelijk aan de helft van de straal van de omcirkel van de driehoek. ◊

Gevolg. De punten H, N en O zijn collineair. De lijn HO wordt de **Euler-lijn** van driehoek ABC genoemd. ◊

figuur 6



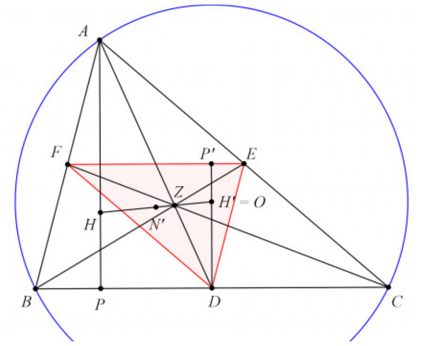
We kijken in figuur 6 speciaal naar de voetpunten A', B', C' van de hoogtelijnen van de driehoek.
We zullen aantonen dat ook deze punten op de n-cirkel liggen.
De tweede snijpunten van de hoogtelijnen met de omcirkel zijn A'', B'', C''.
De rechthoekige driehoeken $AA'C$ en $BB'C$ hebben hoek C (van driehoek ABC) gemeenschappelijk.
Hieruit volgt dus dat:
(6.1)… $\angle A'AC = \angle B'BC = \angle B_1$
Er geldt ook:
(6.2)… $\angle A''AC = \angle A'AC = \angle CBA'' = ½\ \mathrm{bg}(A''C) = \angle B_2$
Uit (6.1) en (6.2) volgt:
$\angle B_1 = \angle B_2$
Omdat BA' loodrecht staat op $A''H$, is driehoek $BA''H$ gelijkbenig (in B), zodat:
$HA' = A'A''$ of $HA' = ½HA''$
Bij de vermenigvuldiging V_H (centrum H, factor ½) gaat het punt A'' van de omcirkel over in het punt A' van de n-cirkel.
Dit geldt analoog voor de snijpunten B'', C''. Deze punten gaan bij de beschouwde vermenigvuldiging over in opvolgend de voetpunten B', C'.
Met andere woorden:

Stelling a2. De voetpunten van de hoogtelijnen van een driehoek liggen op de n-cirkel van die driehoek. ◊

In figuur 7 gebruiken we de vermenigvuldiging V_Z met centrum Z en factor -½.
Bij die vermenigvuldiging gaat driehoek ABC over in driehoek DEF. De punten D, E, F zijn de middens van de zijden van driehoek ABC.
Het hoogtepunt H en de bijbehorende hoogtelijnen van driehoek ABC gaan dan over in het hoogtepunt H' en in hoogtelijnen van driehoek DEF.
Hierdoor zijn H, Z en H' collineair, waarbij $HZ : ZH' = 2 : 1$.

Vraagje. Vallen de hierboven gevonden n-cirkel en de omcirkel van driehoek DEF samen?

figuur 7



7.2. Negenpuntscirkel

In figuur 7 hebben we ook één van de hoogtelijnen getekend, *AP* en zijn V_Z-beeld *DP′*. Nu staat dus *DP′* loodrecht op *EF*.
Omdat *EF* // *BC* (middenparallel) is, staat *DP′* eveneens loodrecht op *BC*.
De lijn *DP′* – dat is een hoogtelijn van driehoek *DEF* – is dus tevens een middelloodlijn van driehoek *ABC* (gaat door *O* en staat loodrecht op *BC*). En dit geldt ook voor beide andere hoogtelijnen van driehoek *DEF*.
Het hoogtepunt *H′* van driehoek *DEF* valt daarmee dus samen met het middelpunt *O* van de omcirkel van driehoek *ABC*.
Omdat $H' \equiv O$ is, zijn de punten *H*, *Z* en *O* collineair (op de lijn *HO*).
Het middelpunt *N′* van de omcirkel van driehoek *DEF* ligt (wegens de vermenigvuldiging V_Z) op de lijn *HO* en wel zo, dat:
$V_Z(O) = N'$ met $|ZN'| = ½ \cdot |ZO|$
Wegens $HZ : ZO = 2 : 1$ is *N′* dan het midden van *HO*.

Gevolg. Het middelpunt *N* van de n-cirkel en het middelpunt *N′* van de omcirkel van driehoek *DEF* vallen samen. ◊

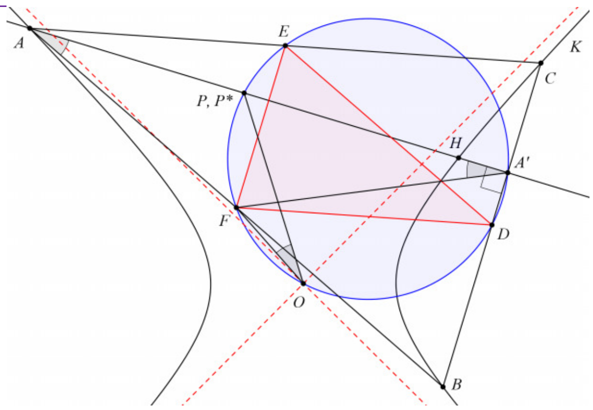
Omdat $V_Z(ABC) = DEF$ met factor -½ is, is de straal van de omcirkel van driehoek *DEF* de *helft* van die van de omcirkel van driehoek *ABC*. En dit ís dus de n-cirkel!
We hernoemen daarom de n-cirkel tot **negenpuntscirkel**.
Zodat:

Stelling a3. Op de negenpuntscirkel van een driehoek liggen de middens van de ‘bovenste stukken’ van de hoogtelijnen, de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de zijden. ◊

8. Een synthetisch bewijs van stelling 5 (in het artikel)

Zoals in het artikel is opgemerkt gaat de negenpuntscirkel van een driehoek *ABC* o.a. door de middens van de zijden daarvan.
In figuur 8 zijn die middens de punten *D*, *E* en *F*. Ook het voetpunt *A′* van de hoogtelijn uit *A* ligt op die cirkel, alsmede het middelpunt *O* van de omgeschreven hyperbool (zie stelling 4 in het artikel).

figuur 8



Is nu *H* het (tweede) snijpunt van *AA′* en de hyperbool $\mathcal{K}$.

Dan moeten (willen) we bewijzen dat *H* het hoogtepunt is van driehoek *ABC*.

Het punt *P* is het midden van het lijnstuk *AH*; merk op dat *AH* een koorde is van $\mathcal{K}$.
Volgens stelling 3 (in het artikel) is:
(8.1)… $\angle POF = \angle(AH, AB) = \angle A'AB$
Is verder P^* het snijpunt van de negenpuntscirkel met de lijn AA' (N.B. de punten *P* en P^* liggen 'dicht' bij elkaar…). Dan is:
(8.2)… $\angle P^*OF = \angle P^*A'F$ (wegens de stelling van de omtrekshoek op de negenpuntscirkel) en verder:
(8.3)… $\angle P^*A'F = \angle A'AF = \angle A'AB$ (in de rechthoekige driehoek ABA')
Uit (8.1), (8.2) en (8.3) volgt:
$\angle POF = \angle P^*OF$
Met andere woorden: de punten *P* en P^* vallen samen. En omdat *P* het midden is van het lijnstuk *AH* ('bovenste' loodlijnstuk) en *P* op de negenpuntscirkel ligt, is *H* het hoogtepunt van driehoek *ABC*. ◊

Gevolg. Uit de negenpuntseigenschappen [a4] volgt dat met de vermenigvuldiging V_H met centrum *H* en factor ½ de omcirkel van driehoek *ABC* wordt afbeeld op de negenpuntscirkel van die driehoek. ◊

9. Constructie orthogonale hyperbool

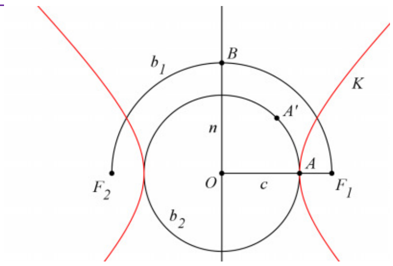
In deze paragraaf geven we de constructie van een orthogonale hyperbool in *GeoGebra* [a5].

In elke constructiestap hierna staat in het linker lid van de 'opdracht' de naam van het geconstrueerde object. In het rechter lid staat de soms verkorte GeoGebra-functie en daarachter – tussen (en) – de te selecteren objecten (in selectie).
We gaan uit van de brandpunten F_1 en F_2 van de hyperbool, met $2c = F_1F_2$.; zie figuur 9a.

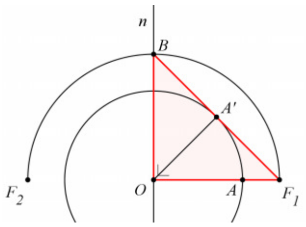
Constructiestappen

1. F_1 = NieuwPunt
2. F_2 = NieuwPunt
3. O = Midden(F_1, F_2)
4. c = Lijnstuk(O, F_1)
5. n = Loodlijn(O, c)
6. b_1 = Halfcirkel(F_2, F_1)
7. B = Snijpunt(n, b_1)
8. A' = Midden(B, F_1)
9. b_2 = CirkelMiddelpuntPunt(O, A')
10. A = Snijpunt(c, b_2)
11. $\mathcal{K}$ = Hyperbool(F_1, F_2, A)

figuur 9a



figuur 9b



Toelichting bij de constructie. Bij een hyperbool geldt algemeen voor de parameters *a*, *b*, *c*:
$a^2 + b^2 = c^2$
Daarin zijn *a*, *b* de lengtes van de halve assen en is *c* de halve afstand van de brandpunten.
Voor een orthogonale hyperbool is $a = b$, zodat dan:
$2a^2 = c^2$ of $a = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$
Zie figuur 9b. Via de constructie van de punten F_1 en F_2 is (de waarde van) *c* impliciet gegeven:
$c = OF_1 = OB$.
Dan is in driehoek OBF_1: $BF_1^2 = 2c^2$, zodat:
$OA = OA' = A'F_1 = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$
Het punt *A* is dus een top van de hyperbool. Waarmee de juistheid van de constructie is aangetoond. ◊

Noten

[a1] Met |*OX*| wordt de *lengte* van het lijnstuk *OX* aangegeven. Indien er geen verwarring mogelijk is, schrijven we ook wel *OX* als de lengte bedoeld wordt.

[a2] Zie ook:
David Wells (1991): *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*. Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker (Nederlandse vertaling, 1993); pag. 241

[a3] Zie eventueel ook:
Frans van Schooten: *Mathematische Oeffeningen*. Op (de website van Henk Hietbrink):
http://www.fransvanschooten.nl/fvs_288x.htm
Bladzijde 288: Van de Tuych-werckelicke beschrijving der Kegel-sneden op een vlack.

[a4] Zie de paragrafen 7.1 en 7.2.
Zie eventueel ook:
Dick Klingens (2000): *Over de cirkel van Feuerbach en de lijn van Euler*. Op:
http://www.pandd.demon.nl/feuerbach.htm (website van de auteur).

[a5] *GeoGebra* is een dynamisch wiskundig softwareprogramma dat meetkunde, algebra, statistiek en analyse combineert in één pakket. Het is beschikbaar voor pc, tablet en smartphone.
Zie: *https://www.geogebra.org*

